Қасиеттері.

1. Егер Гёльдер шарты бір λ_1 көрсеткіші үшін орындалса, онда ол кез-келген $\lambda < \lambda_1$ көрсеткіші үшін орындалатыны айқын, кері тұжырым жалпы дұрыс емес.

Сол себепті кіші λ үшін кеңірек функциялар классы сәйкес келеді. Ең тар класс Липшиц шартын қанағатандыратын функциялар классы.

2. Егер $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ функциялары сәйкесінше λ_1, λ_2 көрсеткіштерімен Гельдер шартын қанағаттандырса, онда олардың қосындысы, көбейтіндісі және бөліндісі, бөлшектің бөлімі нөлге айналмайды деген шартта, $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)$ көрсеткішімен Гельдер шартын қанағаттандырады.

(Бұны қасиет 1 арқылы орнату оңай.)

3. Егер дифференциалданады және ақырлы туындысы бар болса, онда ол Липшиц шартын қанағаттандырады.

Бұл ақырлы өсімшелер туралы теоремадан шығады. Кері тұжырым жалпы айтқанда дұрыс емес, мысал ретінде оны нақты осьте анықталған келесі функция көрсетеді:

$$\varphi(x) = |x|.$$

$\varphi(x)$ функциясы Липшиц шартын қанағаттандырады, бірақ координаттар басында туындысы жоқ, себебі оң жақты және сол жақты туындылары +1-ге және –1-ге тең.

4. Күрделі функция үшін, әр түрлі Гельдер шартымен функционалдық тәуелділіктер орнатылғанда, нәтижедегі соңғы функция тізбектегі барлық көрсеткіштер көбейтіндісіне тең көрсеткішпен Гельдер шартын қанағаттандырады.

5. Гельдер шартын қанағаттандыратын функциядан аналитикалық функция дәл сол көрсеткішпен Гельдер шартын қанағаттандырады.

Дәлелдеу аналитикалық функция Гельдер шартын қанағаттандыратындығын ескеріп тікелей тексеруден алынады.

6. Егер функция бір нүктеде α ретті шексіздікке айналса, онда оның анықталған интегралы $1-\alpha$ көрсеткішімен Гельдер шартын қанағаттандырады.

Дәлелдеу тікелей интегралды бағалаудан шығады.

7. Периодтық функцияның Гельдер шартын қанағаттандыруы оның бірқалыпты жинақталатын Фурье қатарына жіктелуінің қажетті шарты болып табылады.

Мысал 1. $\varphi(x)=\sqrt{x}$ функциясы $\lambda=1/2$ көрсеткішімен нақты осьтің кез-келген интервалында H шартын қанағаттандырады, егер интегралда координаттар басы болмаса, онда бұл функция ол жерде аналитикалық және, сәйкесінше, Липшиц шартын қанағаттандырады.

Мысал 2. $0\le x\le\frac{1}{2}$ және $\varphi(0)=0$ үшін

$$\varphi(x)=\frac{1}{\ln x}$$

болсын. Бұл функция $0\le x\le 1/2$ кесіндісінде үзіліссіз екендігін көру оңай. Бірақ кез-келген $\lambda>0$ үшін

$$\lim_{x\to 0}x^{\lambda}\ln x=0,$$

онда A және λ мәндері қандай болмасада,

$$|\varphi(0)-\varphi(x)|=\left|\frac{1}{\ln x}\right|>Ax^{\lambda}$$

болатын x мәнін көрсетсе болады. Сәйкесінше, қарастырылып жатқан кесіндіде $\varphi(x)$ функциясы Гельдер шартын қанағаттандырады.

Меншіксіз интеграл

Нақты функциядан анықталған интегралды қарастырайық

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Егер интеграл астындағы функция бір $c\in(a,b)$ нүктесінде шексіздікке айналса, онда, егер

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0,\varepsilon_2\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx\right]$$

шегі бар болса, онда ол шенелмеген $f(x)$ функциясынан (a,b) интервалы бойынша меншіксіз интегралы деп аталады. Мұндағы ε_1 және ε_2 бір-бірінен тәуелсіз түрде кез-келген ереже бойынша нөлге ұмтылады.

Анализ курсында, егер $f(x)$-тің шексіздігінің реті бірден кіші болса, меншіксіз интеграл бар екендігі дәлелденеді, яғни

$$|f(x)| < \frac{M}{|x-c|^{\alpha}} \quad (\alpha < 1). \tag{8}$$

Егер $f(x)$ бірінші ретті шексіздікке немесе жоғарға реттіге айналса, онда меншіксіз интеграл жоқ немесе жинақсыз деп атайды.

Ерекше интегралдың басты мәні

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} \quad (a < c < b)$$

интегралын қарастырайық. Оны меншіксіз интеграл ретінде есептесек

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0, \varepsilon_2 \to 0} \left[-\int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{dx}{c-x} + \int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{dx}{x-c} \right] =$$

$$= \ln\frac{b-c}{c-a} + \lim_{\varepsilon_1 \to 0, \varepsilon_2 \to 0} \ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \tag{9}$$

Соңғы өрнектің шегі ε_1 және ε_2-нің нөлге ұмтылу әдісіне байланысты. Сәйкесінше, меншіксіз ретінде түсінілетін интеграл жоқ. Оны ерекше(сингулярлы) интеграл деп атайды. Егер ε_1 және ε_2 арасында бір тәуелділік орнатсақ, ол интегралға маңына бере аламыз. Кесіп алатын интегралымыз c нүктесіне қатысты симметриялы орналасқан деп ұйғарсақ, яғни

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon, \tag{10}$$

онда ерекше интегралдың Коши бойынша бас мәні ұғымына келеміз.

Анықтама. Ерекше

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} \quad (a<c<b)$$

интегралының Коши бойынша бас мәні деп

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-c}\right]$$

айтамыз.

(10) шартты ескере отырып, (9)-дан алатынымыз

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c}=\ln\frac{b-c}{c-a}. \tag{11}$$

Енді жалпылырақ

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}dx \tag{12}$$

интегралын қарастырайық, мұндағы $\varphi(x)$ – (a,b) интервалында Гельдер шартын қанағаттандыратын бір функция. Бұл интеграл, жоғарыда қарастырғанымыз сияқты, басты мән мағынасында түсінеміз, және келесі түрде анықтаймыз:

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)dx}{x-c}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon}\frac{\varphi(x)dx}{x-c}+\int_{c+\varepsilon}^b \frac{\varphi(x)dx}{x-c}\right).$$

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)dx}{x-c}=\int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}dx+\varphi(c)\int_a^b \frac{dx}{x-c}$$

тепе-теңдігін жазып, оң жақтағы бірінші интеграл меншіксіз ретінде жинақталады, себебі Гельдер шартына сәйкес

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}\right|<\frac{A}{|x-c|^{1-\lambda}}, \tag{13}$$

яғни (8) шарт орындалады, ал екінші интеграл (11)-мен сәйкес.

Сонда алатынымыз: (12) ерекше интегралы Коши бойынша бас мән мағынасында бар және

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)dx}{x-c} = \int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}dx + \varphi(c)\ln\frac{b-c}{c-a}$$

тең, мұндағы $\varphi(x)$ Гельдер шартын қанағаттандырады.

Көпмәнді функциялар

Бұдан әрі қарай бізге, екі элементар көпмәнді функциялармен жұмыс істеуге тура келеді – дәрежелік және логарифмдік. Оларды қарастырайық.

$z=\rho e^{i\theta}$ комплекс санында ρ модулі бірмәнді анықталады, ал θ аргументі 2π-ға еселі қосылғышқа дейін. Бұл санның көпмәнділігінің анықтамасына алып келмейді, себебі θ аргументі бар $e^{i\theta}$-дің периоды 2π. Бірақ, егер аналитикалық функцияның өрнектелуінде аргумент периодты емес функция арқылы енгізілсе, онда ол көпмәнді болады. Элементар функциялардың ішінде оларға логарифм және бүтін емес негізді көрсеткіштік функция жатады:

$$\ln(z-z_0)=\ln|z-z_0|+i\arg(z-z_0)=\ln\rho+\Theta,$$

$$(z-z_0)^\gamma=\rho^\gamma e^{i\gamma\theta}=$$

$$=\rho^\alpha\left[\cos(\beta\ln\rho)+i\sin(\beta\ln\rho)\right]e^{i\gamma\theta}e^{i2\pi k\gamma}\ \ (\gamma=\alpha+i\beta).$$

Комлекс сан модулінің логарифмі ретінде үнемі оның нақты бөлігі түсініледі. Жалпы аргументінің берілуі мынадай

$$\Theta=\theta+2k\pi,$$

мұндағы $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$, ал θ – аргументтің абсолютті мәні бойынша ең кішісі. Таңдалған әр k мәніне көпмәнді функцияның бір бөлігі(ветвь) сәйкес келеді. Логарифмдік функцияда бөліктер саны шексіз; дәрежелікте иррационал немесе комплекс көрсеткіште де шексіз. Егер көрсеткіш рационал болса, $\gamma=p/q$, онда дәрежелік функцияда q бөлік. Логарифм бөліктері бір-бірінен $2m\pi i$ түріндегі қосылғышқа өзгешеленеді; ал дәрежелелік – $e^{2m\gamma\pi i}$ көбейткішіне(m – бүтін сан). Көпмәнді функцияны беру үшін таңдалған бөлікті көрсету керек. Бірақ, нақты айнымалы функцияға қарағанда, комплекс айнымалы көпмәнді функцияны толық анықтау үшін бұл жеткіліксіз. Соңғылар үшін келесі түрдегі нүктелер табылады: айнымалы осы нүктені қоршайтын тұйық контур бойынша өзгергенде, бастапқы мәніне қайтып оралады, таңдалған бөлік басқа бір бөлікке ауысады. Бұндай нүктелерді көпмәнді функцияның бөліктелу(точка ветвления) нүктесі деп аталады. Біз қарастырып отқан функция үшін бөліктелу нүктелері болып z_0 және шексіз алыс нүкте болады. Егер айнымалы z_0 нүктесін қоршайтын контурды оң(теріс) бағытта айналатын болса онда Θ аргумент 2π -ға(-2π) өзгереді. Ал логарифм $2\pi i$ ($-2\pi i$) қосылғышын алады, ал дәрежелік функция $e^{2\gamma\pi i}$ ($-e^{2\gamma\pi i}$) көбейткішін алады. Сәйкесінше, таңдалған $k=n$ мәніне сәйкес бөлік, көрші, $k=n+1$($k=n-1$)мәніне сәйкес бөлікке өтеді. Шексіз алыс нүктедегі зерттеу $z=\dfrac{1}{\zeta}$ ауыстыруымен $\zeta=0$ нүктесіндегі зерттеу арқылы жүзеге асады.

Таңдалған бөлікті сақтап қалу үшін бөліктелу нүктесінің маңайында айналып өту мүмкін емес болу керек. Соңғысына, бөліктену нүктелерін қосатын түзулер арқылы кеңістікте кесулер(разрезы) жүргізіп алсақ болады. Логарифмдік және дәрежелік функция үшін кесуді z_0 нүктесінен бастап шексіз алыс ұмтылдыру керек. Таңдалған бөлікті сақтау үшін кесу формасы кез-келген. Егер басқа ерекше ой-тұжырымдар болмаса, кесу өте оңай болып таңдалынады. Көпөлшемді функцияны толық анықталған деп қарастыра аламыз, егер оның бөлігі таңдалып, кесу берілсе.

Θ аргументінің өзгеру шектері кесудің орналасуына байланысты. Егер, мысалғы, кесу абсцисса өсімен θ_0 бұрыш жасайтын сәуле бойымен жүргізілсе, онда басты бөлік($k=0$) үшін $\theta_0 \le \Theta \le \theta_0 + 2\pi$. Дербес жағдайда, кесу абсциссаның оң жарты өсі бойынша бағытталса $0 \le \Theta \le 2\pi$, теріс жарты өсте $-\pi \le \Theta \le \pi$. Егер кесу қисықсызықты болса, онда өзгеру шектері нүктелер функциясы болады. Аргументтің бастапқы мәні кесудің сол жағына(берег) сәйкес(z_0 нүктесінен қарасақ), ақырлысы – оң жағына. Сол және оң жақтағы аргументтің мәнін сәйкесінше Θ^+ және Θ^- деп белгілейік. Онда

$$\Theta^- - \Theta^+ = 2\pi .$$

Таңдалған бөлік үшін кесу үзіліс сызығы болады. Кесу бөліктерінде келесі қатынас орындалады:

$$\ln(z^- - z_0) = \ln(z^+ - z_0) + 2\pi i,$$
$$(z^- - z_0)^\gamma = e^{i2\pi\gamma}(z^+ - z_0)^\gamma .$$

Кесу жақтарында көпмәнді функция бөліктерінің үзілістік қасиеті үзілісті шеттік шарттары бар шеттік есептерді шешкендк көп қолданылады. Егер шеттік шартқа үзілісті функция қосылғыш ретінде кірсе – логарифм, ал көбейткіш ретінде кірсе – дәрежелік қолданылады.